

Kapitel 4: Strukturoptimierung im Leichtbau

Christoph Seeßelberg

FH München - Studienrichtung Stahlbau und Gestaltungstechnik - www.stahlbaustudium.de

1. Einführung: Optimierung im Leichtbau

Wenn wir Ingenieure das Wort Optimierung verwenden, dann ist häufig folgende Vorgehensweise gemeint: Zunächst wird ein Startentwurf auf Grund unserer Ingenieur erfahrung von Hand verbessert. Evtl. werden mit Hilfe der Trial and Error Methode einige Alternativen aufgestellt und miteinander verglichen. Diese Vorgehensweise ist manchmal ausreichend, jedoch nicht immer. Je größer jedoch die Zahl der Optimierungsvariablen wird oder je wichtiger (Einsparung von Kosten!) eine möglichst hohe Zielerreichung ist, um so weniger zufriedenstellend ist eine Optimierung von Hand. Der Einsatz mathematischer Optimierungsalgorithmen [7],[15] kann jetzt weiterhelfen. Darum geht es in diesem Teil der Vorlesung.

2. Grundbegriffe der Optimierung

2.1 Elemente des Optimierungsmodells

Stets gibt es für eine Entwurfsaufgabe eine Vielzahl grundsätzlich „zulässiger“ Lösungen. Als „zulässig“ soll eine Entwurfslösung gelten, die ausreichend tragfähig, ermüdungssicher und gebrauchstauglich ist. Führt man ein Qualitätskriterium – z.B. minimale Querschnittsfläche oder minimale Gesamtkosten – ein, und beurteilt man alle möglichen zulässigen Lösungen nach diesem Kriterium, so gibt es unter den unendlich vielen zulässigen Entwürfen einen optimalen Entwurf, der die höchste Qualität im Sinne des aufgestellten Kriteriums aufweist und gleichzeitig alle Randbedingungen erfüllt.

Optimierungsmodelle bestehen aus drei Elementen:

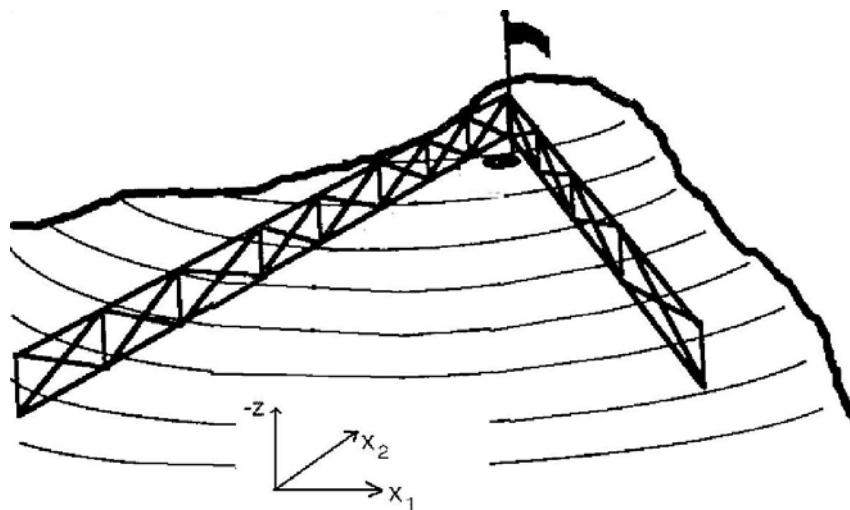
- Zielfunktion $z(\mathbf{x})$: mathematische Beschreibung des Qualitätskriteriums, z.B. Gewicht einer Konstruktion.
- Optimierungsvariable $x_i, i=1,n$: Größen, die im Rahmen der Optimierungsrechnung variiert werden sollen, z.B. Stabquerschnitte
- Restriktionen $g_j, j = 1, m$: Alle Einelnachweise im Rahmen der Tragsicherheitsnachweise und der Gebrauchstauglichkeitsnachweise. Eine typische Spannungsrestriktion lautet z.B.: $g_j = \sigma_d / \sigma_{r,d} \leq 1$.

Damit lautet die Optimierungsaufgabe in mathematischer Schreibweise:

$$\min_{\mathbf{x}} \{z(\mathbf{x}) | g_j(\mathbf{x}) \leq 1; j = 1, m\}$$

In Worten: Stelle den Vektor \mathbf{x} der n Optimierungsvariablen x_i so ein, daß die Zielfunktion $z(\mathbf{x})$ einen minimalen Wert erhält und gleichzeitig alle Restriktionen $g_j, j = 1, m$ erfüllt sind.

Stellt man sich die Zielfunktion als Gebirge vor, dessen höchsten Punkt es zu erreichen gilt, könnte man die Restriktionen als Zäune ansehen, die nicht überschritten werden dürfen. Die Zäune trennen den zulässigen Bereich des Entwurfsraumes vom unzulässigen Bereich. Das Optimum ist der höchste Punkt des Geländes innerhalb des umzäunten Geländes. Der eigentliche Berggipfel (Punkt mit dem besten Zielfunktionswert) liegt im unzulässigen Bereich und stellt daher keine Lösung dar. Bei einer Gewichtsminimierung entspricht der Berggipfel dem Punkt, bei dem alle Querschnittsmaße des Kranbahnrägers die Größe 0 haben: das Gewicht ist dann zwar minimal, aber das Bauteil hat keine Tragfähigkeit mehr – und daher ist eine solche Lösung unbrauchbar.



2.2 Topologie eines Optimierungsproblems: Der Stabdreischlag

Der Stabdreischlag (Abb.) werde durch zwei gleich große, aber nicht gleichzeitig auftretende Lastfälle $\mathbf{F}_{(1)}$ und $\mathbf{F}_{(2)}$ beansprucht. Der in Klammern aufgeführte Index beschreibt die Lastfallnummer. Bei vorgegebenem Werkstoff sollen die Querschnittsflächen a_1 , a_2 und a_3 so gewählt werden, daß das Tragwerksgewicht minimal ist und die Spannungen gegebene zulässige Grenzwerte σ_{zul} nicht überschreiten.

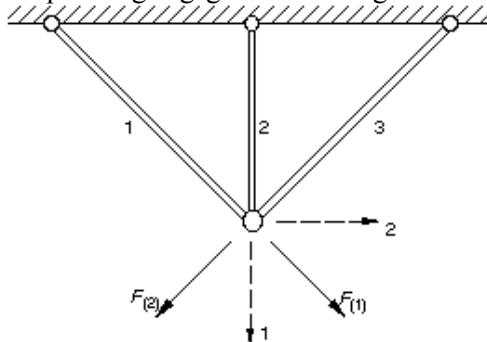


Abb. Der Stabdreischlag

Das *Optimierungsmodell* für den Stabdreischlag lautet:

- Optimierungsvariablen: Querschnittsflächen a_1 , a_2 , a_3
Die zu bestimmenden Querschnittsflächen als Optimierungsvariable oder *Entwurfsvariable* werden in einem Entwurfsvariablenvektor $\mathbf{x} = (a_1, a_2, a_3)^T$ zusammengefaßt.
- Zielfunktion siehe Gl. 2-1a

$$\text{minimiere } z = \sum_i \gamma_i \cdot l_i \cdot a_i ; \quad i=1,2,3 \quad (2-1a)$$

In der *Zielfunktion* z von (2-1a) bedeuten γ_i und l_i die vorgegebenen spezifischen Gewichte bzw. Längen des Stabes i .

- Restriktionen
 - + Spannungsrestriktionen nach Gl. 2-1b

$$1 - \frac{\sigma_{i(j)}(a_1, a_2, a_3)}{\sigma_{zul_i}} \geq 0 ; \quad i=1,2,3; j=1,2 \quad (2-1b)$$

In den insgesamt sechs *Restriktionen* (2-1b) ist $\sigma_{i(j)}$ die von den Querschnittsflächen abhängige Spannung im Stab i unter dem Lastfall j , σ_{zul_i} ist die vorgegebene zulässige Spannung im i -ten Stab. Durch die Normierung der insgesamt sechs Restriktionen in (2-1b) auf σ_{zul_i} wird zweierlei

erreicht: zum einen enthebt man sich des Vorzeichenproblems von $\sigma_{i(j)}$, zum anderen schwankt die Restriktionsfunktion nur in den Grenzen 0 und 1 für Spannungen zwischen $\sigma_{i(j)} = 0$ bzw. $\sigma_{i(j)} = \sigma_{zul i}$. Dies erweist sich für die Lösungsalgorithmen als numerisch vorteilhaft.

+ Variablenabschränken a_i^u zur Vermeidung unsinniger Werte a_i

$$a_i - a_i^u \geq 0 \quad (2-8)$$

Zur Vervollständigung der Aufgabenformulierung müssen natürlich noch die *Systemgleichungen* zur Verfügung stehen, die das interessierende physikalische Verhalten des Tragwerks beschreiben. Dies ist hier der Zusammenhang zwischen den Spannungen und Entwurfsvariablen (Querschnittsflächen), wie er in (2-1b) benötigt wird. Dieser Zusammenhang sei gegeben durch die in der Regel nichtlinearen Funktionen

$$\sigma_{i(j)} = c_{i(j)}(a_1, a_2, a_3) \quad ; \quad i=1,2,3; \quad j=1,2 \quad (2-1c)$$

wobei in den $c_{i(j)}$ die Statik des Tragwerks steckt. Mit den Beziehungen (2-1) ist die Optimierungsaufgabe beschrieben.

Gerade bei den Systemgleichungen (2-1c) ist ganz entscheidend, ob dieser Zusammenhang formelmäßig *explizit* oder numerisch *implizit* gegeben ist. Ersteres gelingt nur in einfacheren Fällen wie hier beim Stabdreischlag:

Systemgleichungen:

Lastfall 1

$$\begin{aligned} \sigma_{1(1)} &= \frac{F_{(1)}}{a_1} - \frac{a_2 a_3 F_{(1)}}{a_1 [a_1 a_2 + a_2 a_3 + \sqrt{2} a_1 a_3]} \\ \sigma_{2(1)} &= \frac{\sqrt{2} a_3 F_{(1)}}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + \sqrt{2} a_1 a_3} \\ \sigma_{3(1)} &= \frac{-a_2 F_{(1)}}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + \sqrt{2} a_1 a_3} \end{aligned} \quad (2-2a)$$

Lastfall 2

$$\begin{aligned} \sigma_{1(2)} &= \frac{-a_2 F_{(2)}}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + \sqrt{2} a_1 a_3} \\ \sigma_{2(2)} &= \frac{\sqrt{2} a_1 F_{(2)}}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + \sqrt{2} a_1 a_3} \\ \sigma_{3(2)} &= \frac{F_{(2)}}{a_3} - \frac{a_2 a_3 F_{(2)}}{a_3 [a_1 a_2 + a_2 a_3 + \sqrt{2} a_1 a_3]} \end{aligned} \quad (2-2b)$$

Werden zum Beispiel als Lasten $|F_1| = |F_2| = 150$ kN und ein Aluminium-Werkstoff mit $E = 7,2 \cdot 10^4$ N/mm² und einer zulässigen Spannung von $\sigma_{zul} = 216$ N/mm² gewählt, so ergeben sich als Gewichtsoptimum $z^{opt} = 49,5$ N mit den Querschnittsflächen $a_1 = a_3 = 5,48$ cm² (Symmetrie) und $a_2 = 2,84$ cm². Die Topologie des Optimierungsproblems kann der nachfolgenden Abbildung entnommen werden, die übernächste zeigt einen typischen Iterationsverlauf.

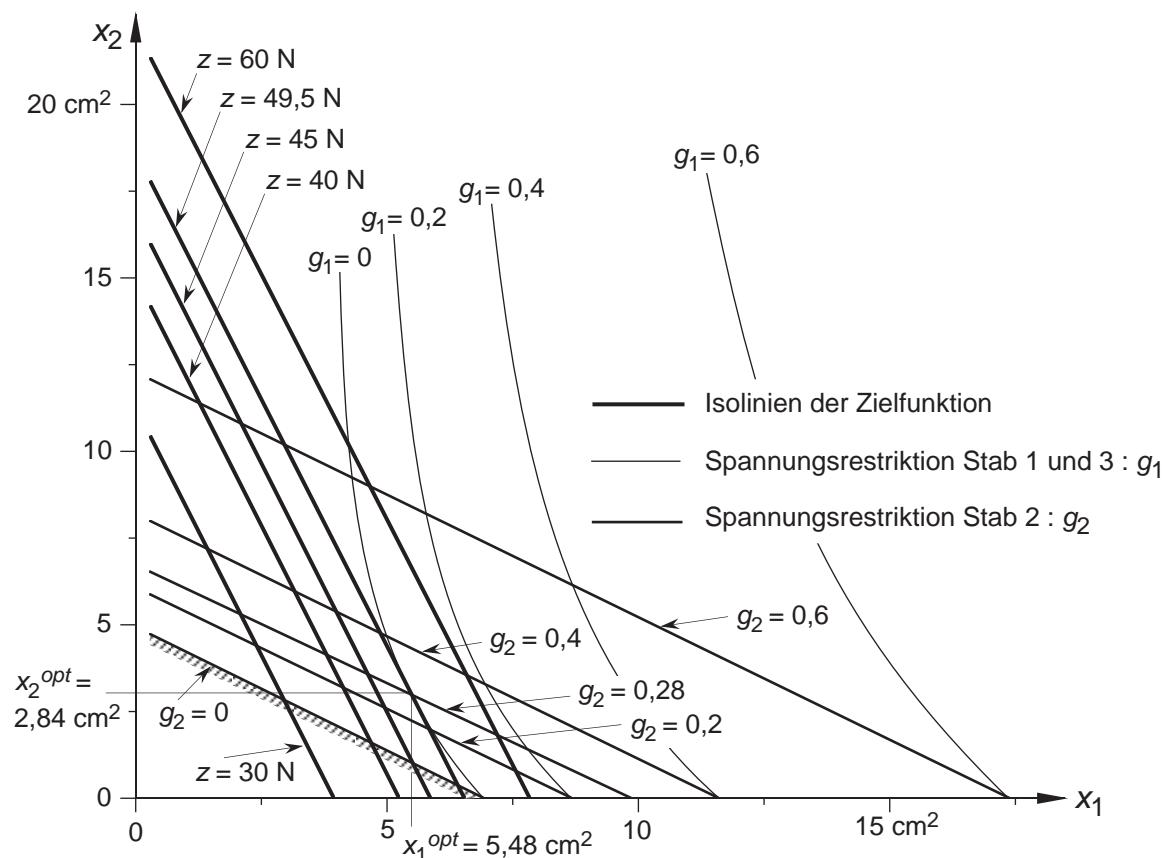


Abb. Topologie des Optimierungsproblems

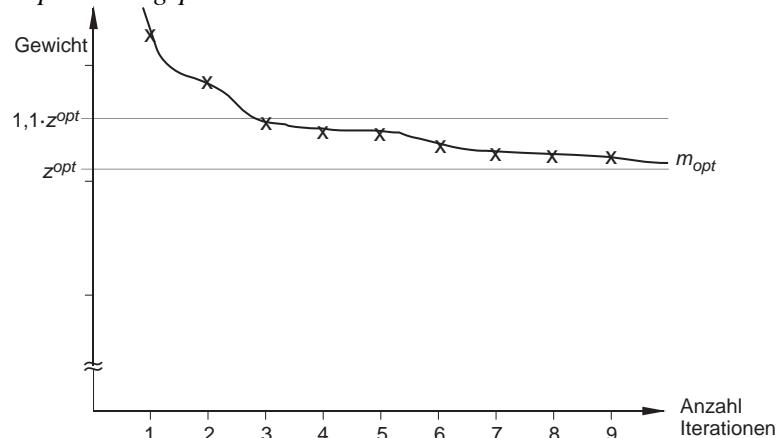


Abb. Typischer Iterationsverlauf

2.3 Weitere Grundbegriffe bei der Optimierung

- lokale und globale Optima

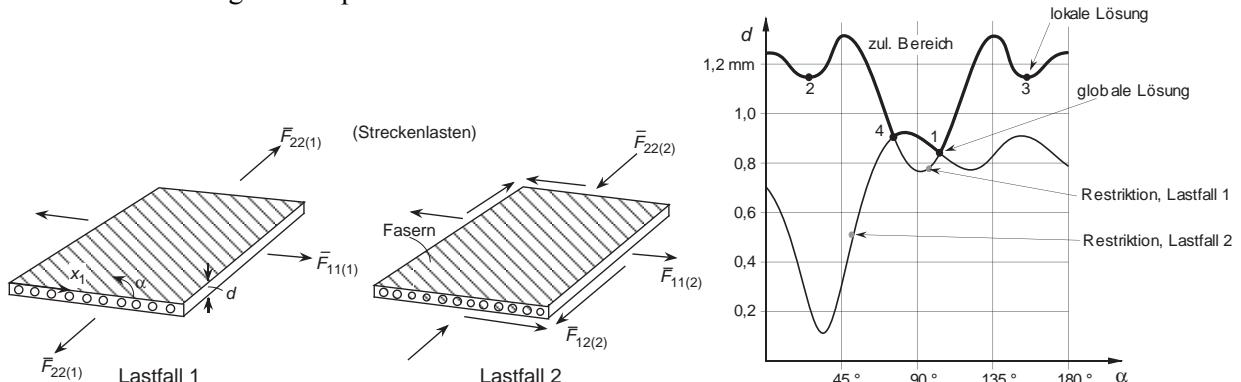


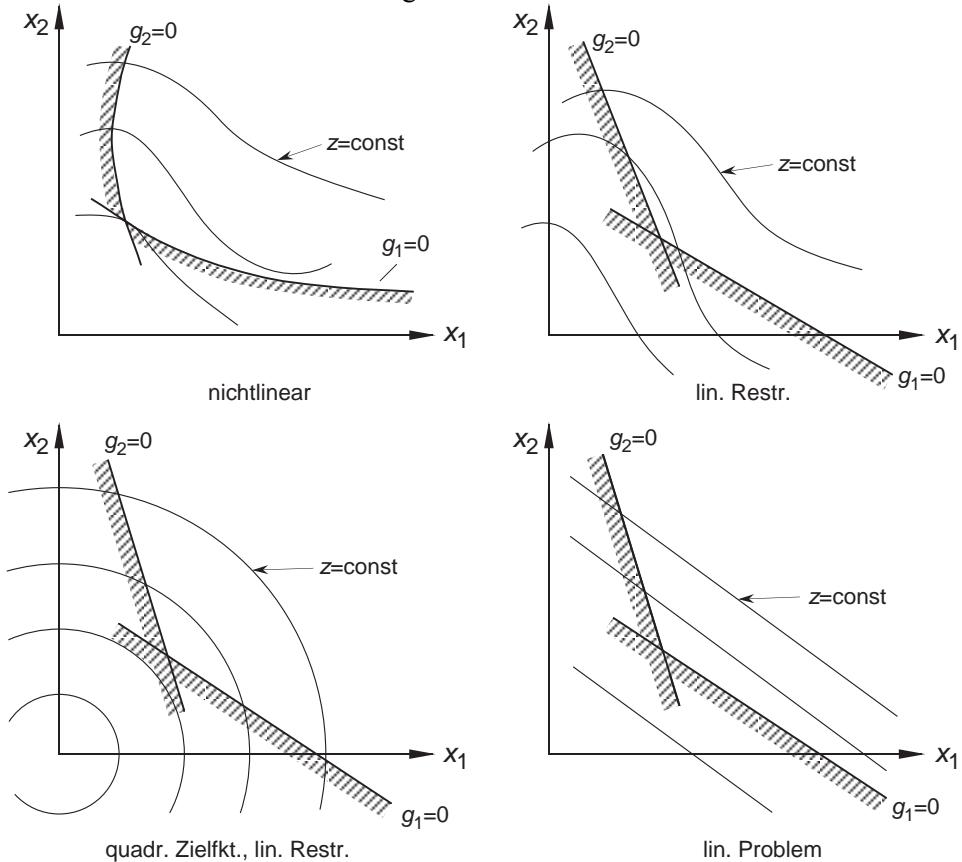
Abb. Lokale und globales Optimum am Beispiel der Optimierung einer faserverstärkten Scheibe

- aktive und inaktive Restriktionen

Arten von Optimierungsproblemen:

- freie – beschränkte Optimierungsaufgaben
- lineare - nichtlineare Optimierungsaufgaben (siehe Abb.)

Eine Optimierungsaufgabe ist linear, wenn alle Optimierungsfunktionen lineare Funktionen der Optimierungsvariablen darstellen. Für solche Aufgaben gibt es einfache und robuste Näherungsverfahren (z.B. Simplex-Verfahren, [15]), die darauf beruhen, daß die Lösung im Bereich des Schnittpunkts zweier Restriktionen liegen muß. Die meisten ingenieurpraktischen Optimierungsprobleme sind jedoch nichtlinear und damit wesentlich schwieriger lösbar.



- Einziel - Mehrzieloptimierung
- kontinuierliche-diskrete Optimierung:

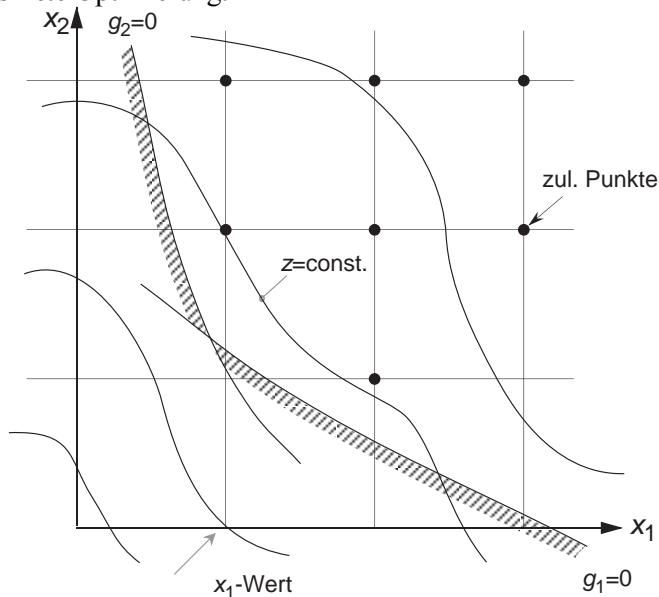


Abb. Topologie einer diskreten Optimierungsaufgabe

2.4 Aufgabenstellungen für Optimierungen im Leichtbau

Die verschiedenen Aufgabenstellungen für eine Optimierung sind im folgenden mit steigendem Schwierigkeitsgrad sortiert angegeben.

- Querschnittsoptimierung von Stabwerken

Topologie und Knotenkoordinaten bleiben unverändert, nur die Querschnitte werden verändert.

- Optimierung der Knotenlagen von Stabwerken



Ziel: niedriges Gewicht,
niedrige Kosten

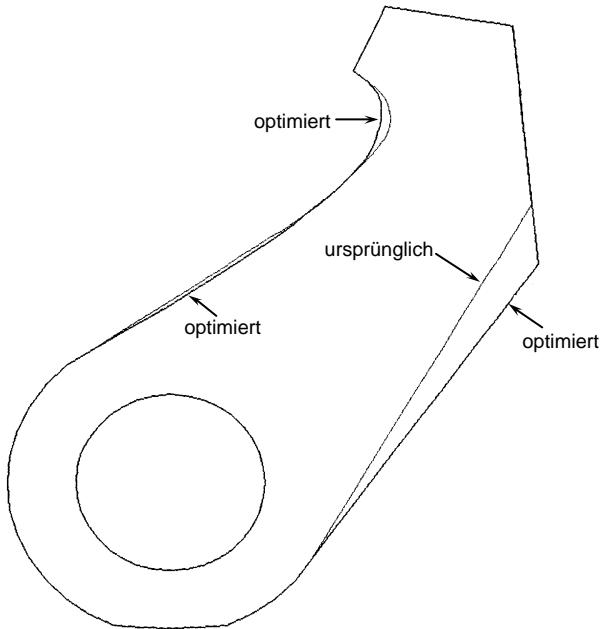
Restriktionen: Festigkeit,
Steifigkeit,
Eigenfrequenz,
Fertigung



Entwurfsvariable:
Querschnittsflächen,
Lage der Fachwerknoten

Systemgleichungen:
Statik der Brücke,
Eigendynamik der Brücke

- Topologieoptimierung von Stabwerken
- Formoptimierung von Flächentragwerken



2.5 Lagrange Verfahren: die Antwort der Mathematik auf die Optimierungsfrage

Lagrangesche Multiplikatorenmethode; siehe z.B. [7], Kap. 4.6

3. Optimierungsverfahren für den Leichtbau

3.1 Der Algorithmusbegriff

Andere Bezeichnungen für Algorithmus sind Prozedur, Prozeß, Verfahren, Methode, usw. Darunter wird ein Satz von Regeln oder Anweisungen verstanden, um von einem gegebenen ‚Input‘ zu einem bestimmten ‚Output‘ zu kommen. Jeder Schritt ist so präzise definiert, daß die Übersetzung in eine Computersprache und die Ausführung mit einem Rechner möglich sind.

Das Konzept eines Algorithmus existiert als Idee unabhängig von jeder Implementierung auf einem Computer. Jedoch ist ein Rechenprogramm ein hervorragendes Hilfsmittel zur Überprüfung der Tauglichkeit eines Algorithmus.

Das Grundkonzept von Optimierungsalgorithmen lautet:

- 1 Lege einen Startvektor $\mathbf{x}^{(k)}$ fest; setze den Iterationsindex $k = 1$
- 2 Ermittle einen Änderungsvektor $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$, der $\mathbf{x}^{(k)}$ im Sinne der Optimierungsaufgabe verbessert.
(Auswertungen von Zielfunktion und Restriktionen sind dazu erforderlich)
- 3 Bilde: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}$
- 4 Überprüfe ein Abbruchkriterium;
falls nicht erfüllt: $k := k + 1$; gehe zu 2
- 5 Lösungsvektor: $\mathbf{x}^{opt} = \mathbf{x}^{(k+1)}$

Die einzelnen Algorithmen unterscheiden sich hauptsächlich darin, wie der Änderungsvektor $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$ gebildet wird (Schritt 2). Ein Algorithmus soll stets nach einer möglichst geringen Anzahl von Schritten die Umgebung der Lösung erreichen und dann abbrechen. Für die Beschreibung des Konvergenzverhaltens von Optimierungsalgorithmen sind folgende Begriffe wichtig:

- Der Konvergenzbereich bezeichnet den Teil des n -dimensionalen Raumes \mathbb{R}^n , in dem der Startvektor $\mathbf{x}^{(1)}$ liegen muß, damit die Folge der $\mathbf{x}^{(k)}$ gegen den optimalen Entwurfsvariablenvektor \mathbf{x}^{opt} strebt.
- Die Konvergenzrate p ist definiert als

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{(k+1)}}{e^{(k)}} \right| < 1 \quad (5-1)$$

$e^{(k)}$ stellt dabei ein Fehlermaß dar: $e^{(k)} = \| \mathbf{x}^{opt} - \mathbf{x}^{(k)} \|$. Die Folge der $\mathbf{x}^{(k)}$ strebt für steigende k gegen einen Grenzwert \mathbf{x}^{opt} . Für $0 < p < 1$ spricht man von linearer Konvergenz, $p = 0$ bedeutet superlineare Konvergenz.

Zur Beurteilung der Optimierungsalgorithmen ist in der Praxis der Rechenaufwand zur Bestimmung des Optimums wichtiger als die theoretisch definierte Konvergenzrate. Diese Gesamtrechenzeit setzt sich zusammen aus der CPU-Zeit für Systemanalyse und Gradientenberechnung (z.B. mit FEM) in sämtlichen Iterationsschritten und der vom Optimierer selber benötigten CPU-Zeit. Bei mittleren und größeren Optimierungsaufgaben bestimmen Systemanalysen und Gradientenberechnungen und die Anzahl der Iterationsschritte maßgeblich die Gesamtrechenzeit.

3.2 Optimalitätskriterien: Das voll beanspruchte Tragwerk

Lösungen bestimmter Optimierungsaufgaben weisen zuweilen bestimmte Eigenschaften auf. Die Optimierungsaufgabe läßt sich dann lösen, indem das Tragwerk gesucht wird, daß genau die gesuchte Eigenschaft aufweist.

Beispiel: Der Zugstab unter Spannungsrestriktion mit dem minimalen Gewicht hat stets die Eigenschaft, daß seine maximale Spannung die zulässige Obergrenze genau erreicht.

Die optimale Querschnittsfläche läßt sich daher sofort angeben zu $\min A = \max N / f_y$

Das Verfahren des voll beanspruchten Tragwerks (FSD, fully stressed design) ist ein Optimalitätskriterienverfahren. Gesucht wird das Tragwerk, bei dem alle Bauteile in mindestens einem Lastfall bis an die zulässige Obergrenze beansprucht sind.

Vorteile eines solchen Verfahrens sind

- einfache Anwendbarkeit
- schnelle Konvergenz (beim Zugstab in einem einzigen Schritt, bei statisch unbestimmten Tragwerken in wenigen Schritten).

Nachteil ist, daß die Voraussetzungen nur bei bestimmten Tragwerken gegeben sind: streng genommen nur bei der Gewichtsminimierung eines statisch bestimmten Tragwerken oder eines statisch unbestimmten Tragwerken mit einem einzigen Lastfall. Bereits für die Gewichtsminimierung eines Tragwerks unter Spannungs- und Verformungsrestriktionen ist das FSD Verfahren nicht mehr anwendbar.

Beispiel für ein Tragwerk, dessen gewichtsoptimale Struktur nicht voll beansprucht ist: Stabdreischlag, siehe Kap. 2.2: Die Lösung dieser Aufgabe führt auf die interessante Tatsache, daß im Gewichtsoptimum nicht notwendigerweise alle Strukturteile (Stäbe) voll beansprucht sein müssen, obwohl nur Spannungsrestriktionen vorhanden sind. Werden zum Beispiel als Lasten $|F_1| = |F_2| = 150 \text{ kN}$ und ein Aluminium-Werkstoff mit $E = 7,2 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ und einer zulässigen Spannung von $\sigma_{zul} = 216 \text{ N/mm}^2$ gewählt, so ergeben sich als Gewichtsoptimum $z^{opt} = 49,5 \text{ N}$ mit den Querschnittsflächen $a_1 = a_3 = 548 \text{ mm}^2$ (Symmetrie) und $a_2 = 284 \text{ mm}^2$. Dabei wird Stab 1 im Lastfall 1 und Stab 3 im Lastfall 2 bis zur zulässigen Spannung beansprucht, die Spannung im Stab 2 ist in beiden Lastfällen mit 148 N/mm^2 deutlich unter dem zulässigen Wert. Bei vorgegebenem Werkstoff muß also ein gewichtsoptimales, statisch unbestimmtes Tragwerk unter Spannungsrestriktionen bei mehreren Lastfällen nicht voll – d. h. bis zu den ertragbaren Spannungen – beansprucht sein! Denn wird vom Optimum ausgehend der scheinbar zu große Querschnitt des Stabes 2 verringert, so sinkt die Gesamtsteifigkeit. Daraus ergeben sich höhere Belastung in den Stäben 1 und 3 die eine das Gewicht insgesamt erhöhende Querschnittszunahme erfordern, damit die sich schon an der zulässigen Grenze befindlichen Spannungen nicht weiter erhöhen.

FSD-Algorithmus für statisch bestimmte und unbestimmte Strukturen

- 1 Wähle : Startvektor $\mathbf{x}^{(k)}$; Iterationszähler $k=1$
- 2 Berechne die Spannungen $\sigma_i(j)(\mathbf{x}^{(k)})$ der Bauteile $i=1,n$ über alle Lastfälle $j=1,q$
- 3 Redesign-Formel:

$$x_i^{(k+1)} = \max \left\{ x_i^u ; x_i^{(k)} \cdot \left(\frac{\sigma_i(j)(\mathbf{x}^{(k)})}{\sigma_{i,zul}} \right)^{\beta_i} \right\} ; j=1,q ; i=1,n \quad (3-1)$$

β_i ist ein bauteilabhängiger Parameter, z.B.:

$$\begin{aligned} \beta_i &= 1 && \text{wenn } x_i \text{ für eine Stabquerschnittsfläche steht} \\ \beta_i &= 0,5 && \text{wenn } x_i \text{ die Dicke einer Platte darstellt} \end{aligned}$$

- 4 Abbruchkriterium; z.B.:

$$\left| \frac{z(\mathbf{x}^{(k+1)}) - z(\mathbf{x}^{(k)})}{z(\mathbf{x}^{(k)})} \right| < \varepsilon \quad (3-2)$$

Wenn ja:

Stop

Wenn nein:

$k := k+1$; gehe zu 2

Die Redesign-Formel 3-2 ergibt sich aus der Überlegung, daß die Querschnittswerte in Abhängigkeit von ihrem Ausnutzungsgrad $c = \sigma_i(j)(\mathbf{x}^{(k)}) / \sigma_{i,zul}$ verändert werden sollen. Mit dem Exponenten β_i wird die Redesign-Formel nun auf unterschiedliche Bauteile anwendbar. Die β_i ergeben sich aus der Betrachtung statisch bestimmter Tragwerke: Für Stäbe gilt $\sigma_i = N_i / a_i$. Eine Veränderung der Spannungen σ_i auf $\sigma_{i,zul}$ erfordert eine Anpassung der Stabquerschnittsflächen a_i auf

$$a_i^{(k+1)} = c^\beta \cdot a_i^{(k)} = c^1 \cdot a_i^{(k)} \quad (3-3)$$

Für Platten gilt: $\sigma_i = m_i \cdot 2 / t_i^2$ (m = Biegemoment pro Längeneinheit). Eine Veränderung der Spannungen σ_i auf $\sigma_{i,zul}$ wird bewirkt durch eine Anpassung der Plattendicke t_i auf

$$t_i^{(k+1)} = c^\beta \cdot t_i^{(k)} = c^{0,5} \cdot t_i^{(k)} \quad (2-12)$$

Der Wert β ist also für Stäbe 1,0 und für Platten mit 0,5 anzusetzen.

Für eine statisch bestimmte Struktur konvergiert der FSD-Algorithmus in einem Schritt. Auch für statisch unbestimmte Tragwerke weist er eine hohe Konvergenzrate auf (ca. 3-5 Iterationsschritte sind notwendig).

3.3 Gradientenverfahren: Die Methode der zulässigen Richtungen

Analytische Lösungen lassen sich – außer für triviale Problemstellungen - nicht finden, so daß stets auf numerische, iterative Verfahren zurückgegriffen wird. Die effizientesten Verfahren (Gradientenverfahren) verwenden dabei Informationen aus den ersten oder zweiten Ableitungen der Optimierungsfunktionen zur Findung einer von Schritt zu Schritt verbesserten Lösung. Beispielhaft für die große Zahl vorhandener Algorithmen soll im Folgenden das Verfahren der zulässigen Richtungen [7], [15] skizziert werden.

Das Prinzip läßt sich gut an der schon in Kap. 2.1 dargestellten zweidimensionalen Optimierungsaufgabe verdeutlichen (Abb.): die Zielfunktion $z(\mathbf{x})$ hängt von den Variablen x_1 und x_2 ab und wird – mit (-1) multipliziert – als Schar von Höhenlinien über der x_1-x_2 Ebene dargestellt. Die Zielfunktionswerte bilden ein Gebirge über der Ebene der Optimierungsvariablen x_1 und x_2 . Ein blinder Wanderer sucht von einem Startpunkt im Tal aus den höchsten Punkt, der alle Randbedingungen erfüllt (Optimum). Wegen seiner Blindheit übersieht er zwar das Gelände nicht, er kann aber an seinem Standort \mathbf{x} durch Tastschritte die steilste Aufstiegsrichtung $\mathbf{s}^{(1)} = -\nabla z$ (∇z = Gradient der Zielfunktion z) feststellen. Der Wanderer folgt der Richtung des steilsten Aufstieges so lange (Schrittweite $\alpha^{(1)}$), bis eines der drei folgenden Ereignisse eintritt:

- Der höchstmögliche Punkt \mathbf{x}_{opt} ist erreicht, oder:
- Das Gelände beginnt wieder abzufallen, oder:
- Es wird eine Restriktionsgrenze erreicht. In der Abb. werden solche Restriktionsgrenzen als Zäune dargestellt, die vom Wanderer nicht überschritten werden dürfen.

Der verbesserte Variablenvektor $\mathbf{x}^{(2)}$, der dem neuen Standort des Wanderers entspricht, ist nun:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{s}^{(1)} \cdot \alpha^{(1)} \quad \text{bzw. allgemein für den Iterationsschritt } k: \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)} \cdot \alpha^{(k)}$$

Am Zaun angekommen wählt der Wanderer diejenige Richtung $\mathbf{s}^{(2)}$, die einerseits möglichst steil nach oben führt und andererseits zulässig – d.h. ohne Überschreitung der Restriktionsgrenzen – bleibt. Der mit der Fahne markierte Punkt \mathbf{x}_{opt} besitzt den besten Zielfunktionswert bei gleichzeitig erfüllten Restriktionen.

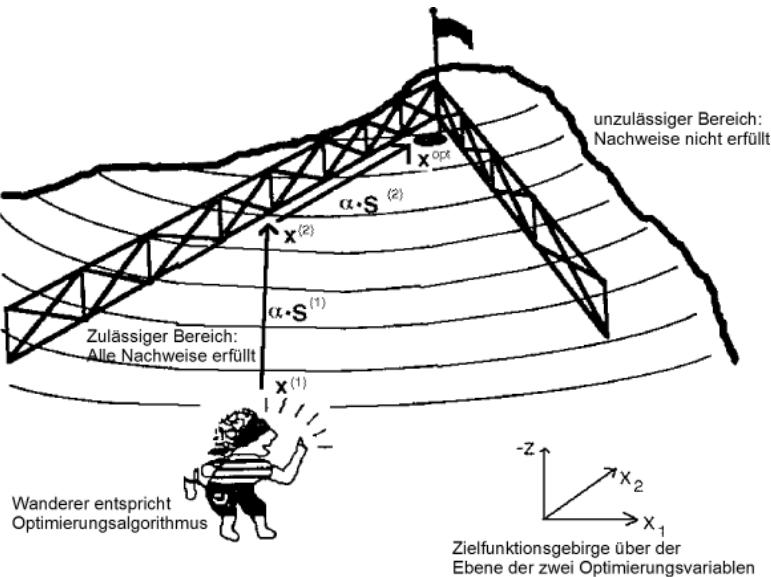


Abb.: Das Verfahren der zulässigen Richtungen: Analogie vom blinden Wanderer [15]

In unserem Bsp. ist der Wanderer (=Algorithmus) mit zwei Iterationsschritten am Ziel. Tatsächlich sind meistens ca. 10 Schritte erforderlich, um in die Nähe des Optimums zu gelangen.

3.4 Evolutionsstrategien

Die auf Rechenberg und Schwefel [3] zurückgehenden *Evolutionsstrategien* sind höher entwickelte Zufallsstrategien, die dem biologischen Prozeß der Evolution nachempfunden sind und auf den Prinzipien Mutation und Selektion beruhen. Ausgehend von einem Startvektor (Eltern) werden mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators mehrere Vektoren (Nachkommen) erzeugt, die normalverteilt in der Umgebung des Startvektors liegen (Mutation). Nun wird die Qualität der so erzeugten zweite Generation mit Hilfe der Zielfunktion überprüft. Diejenigen Punkte mit den besten Zielfunktionswerten dienen als Eltern der nächsten Generation, die anderen zufallserzeugten Punkte werden verworfen (Selektion). Die Streuung der Normalverteilung (Schrittweite) wird über das Verhältnis von Anzahl der Nachkommen mit verbessertem Zielfunktionswert zur Gesamtzahl der Nachkommen gesteuert; sinkt diese Erfolgsquote, wird die Schrittweite reduziert. Evolutionsstrategien sind nicht nur zur Lösung restriktionsfreier Optimierungsaufgaben anwendbar, mit ihnen lassen sich grundsätzlich auch beschränkte Aufgaben lösen. Sie weisen eine hohe Allgemeingültigkeit auf und sind leicht programmierbar.

Nicht nur dem Laien erscheinen die Evolutionsstrategien besonders plausibel und faszinierend, da die ihnen zugrunde liegenden Ideen aus der Biologie bekannt und dort bewährt sind. Eine große Zahl von Veröffentlichungen in populärwissenschaftlichen Zeitschriften zeugt davon, daß die Übertragung von Prinzipien der Biologie auf technische Fragestellungen (Bionik) von großem Interesse ist. Bei der Beurteilung der Evolutionsstrategien wird jedoch häufig übersehen, daß die biologische Evolution Milliarden von Jahren und damit sehr viele Mutationen für die Entwicklung (Optimierung) des Lebens bis zu seiner heutigen Form benötigt hat. Von einem Algorithmus zur Strukturowptimierung wird dagegen höchste Effizienz erwartet, die Evolutionsstrategien nicht bieten können. Denn diese nutzen viel zu wenig der in den Modellen vorhandenen mathematischen Informationen aus.

Bedeutung haben die Evolutionsstrategien jedoch bei der Lösung besonderer Optimierungsaufgaben, z.B. bei diskreten Optimierungsaufgaben (Die Optimierungsvariablen sind nicht stetig, sondern diskret definiert).

3.5 Der Natur abgeschaute Optimierungsverfahren: CAO

Matthek [4] untersuchte die Vorgänge beim Wachsen von Bäumen in einem Wald. Dabei fand er heraus, daß Bäume in Bereichen hoher Spannungskonzentration Material anlagern (wachsen). Würde der Baum dabei seinen Stamm nicht so dünn wie möglich belassen, hätte er im Wettbewerb um das Licht das Nachsehen gegenüber dem schlankeren Nachbarbaum, der mit derselben Materialmenge höher hinaus könnte. So entsteht im Laufe der Zeit eine Struktur, die spannungsmäßig ziemlich homogen und grenzwertig ausgelastet ist. Dieses Prinzip übertrug er auf technische Strukturen und nannte sie CAO.

CAO ist eine computerunterstützte Methode für die Formoptimierung mechanischer Komponenten. Ziele sind

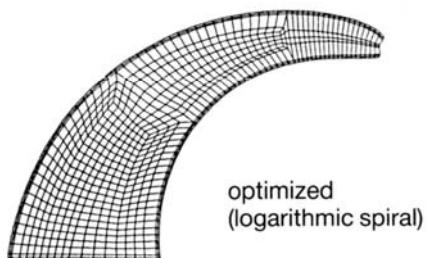
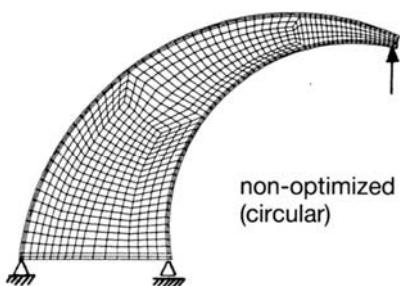
- Reduktion von Kerbspannungen
- Erreichen einer möglichst gleichmäßigen Spannungsverteilung
- Gewichtsminimierung
- Hohe Ermüdungsfestigkeit

Die Erreichung dieser Ziele setzt eine besonders leistungsfähige FEM-Umgebung voraus. Weiter unten ist das Beispiel „Tigerklaue“ dargestellt.

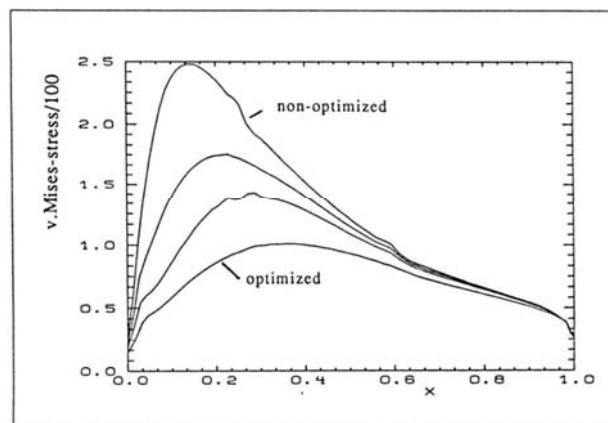
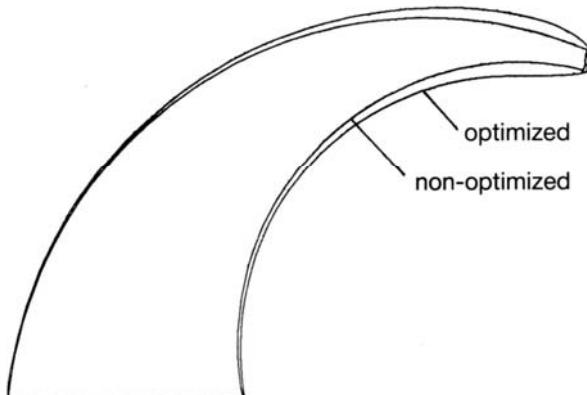
Bewertung:

- CAO ist ein Optimalitätskriterienverfahren. Das Kriterium lautet: eine Struktur ist dann gewichtsoptimal, wenn sie einen möglichst gleichmäßigen Spannungszustand aufweist.
- Für bestimmte Aufgabentypen ist CAO sehr gut einsetzbar: Formoptimierung mit dem Ziel einer Gewichtsminimierung von Strukturen, die von einem einzigen dominierenden Lastfall beansprucht werden unter ausschließlich Spannungsrestriktionen stehen.
- Besonders bei anderen Restriktionsarten (z.B. Restriktionen hinsichtlich der Eigenfrequenzen oder der Verformung) ist das Verfahren nicht mehr ohne weiteres einsetzbar.

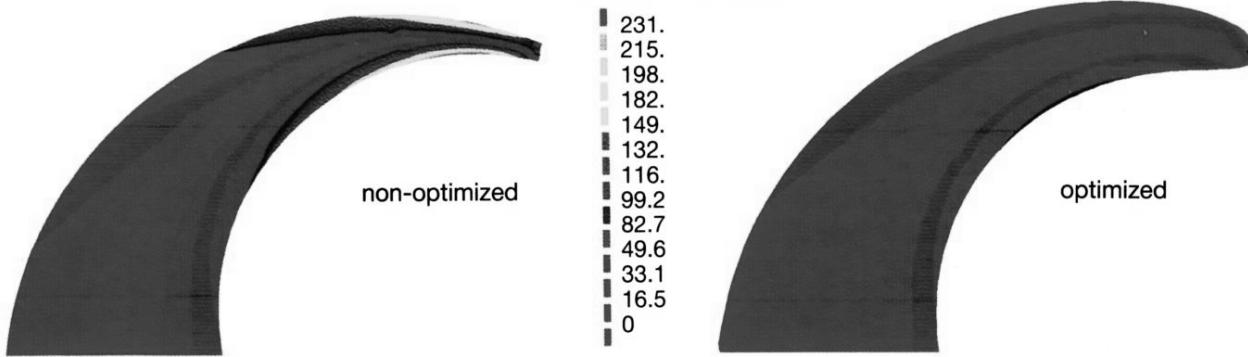
Claw of a tiger



v. Mises-stress along contour



v. Mises-stress distribution



4 Optimierungsrechnung mit EXCEL

4.1 Die Zielwertsuche

Die in EXCEL verfügbare „Zielwertsuche“ ist zwar kein Optimierer, mit ihr können jedoch Optimierungsvariablen so bestimmt werden, daß eine bestimmte Eigenschaft erfüllt ist.

Bsp: Ein Kreis mit dem Radius $r=10$ cm hat die Querschnittsfläche $A=\pi r^2$. Wie müßte der Radius r verändert werden, damit $A = 100$ cm² wird?

2 Möglichkeiten: a) Gleichung nach r auflösen: $r = \sqrt{A/\pi}$

b) Gleichung unverändert lassen, Zielwertsuche anwenden

Prinzip:

Der Wert einer Zelle ist das Ergebnis einer Formelberechnung. Diese Formel bezieht sich direkt oder indirekt auf eine oder mehrere Zellen (Vorgängerzellen). Der Wert in einer Vorgängerzelle soll nun so geändert werden, daß die Zielzelle einen vorher festgelegten Zielwert erreicht. Dazu legen Sie eine der Vorgängerzellen als veränderbare Zelle fest.

Bei der Zielwertsuche handelt es sich gewissermaßen um ein »Rückwärts-Rechnen«.

Die veränderbare Zelle muß also eine Vorgängerzelle von der Zielwertzelle sein, darf aber selbst keine Formel enthalten.

Unter Extras-Optionen-Berechnen können Sie die Iteration beeinflussen: Die Zielwertsuche wird nach 100 Iterationen abgebrochen oder wenn sich alle Werte um weniger als 0,001 ändern.

4.2 Der Solver

Das Programm Microsoft EXCEL™ [8] enthält als integralen Bestandteil eine sehr gute und einfach bedienbare Optimierungsroutine, die den Namen „Solver“ trägt. Die Funktionsweise des „Solver“ ähnelt dem Vorgehen des blinden Wanderers.

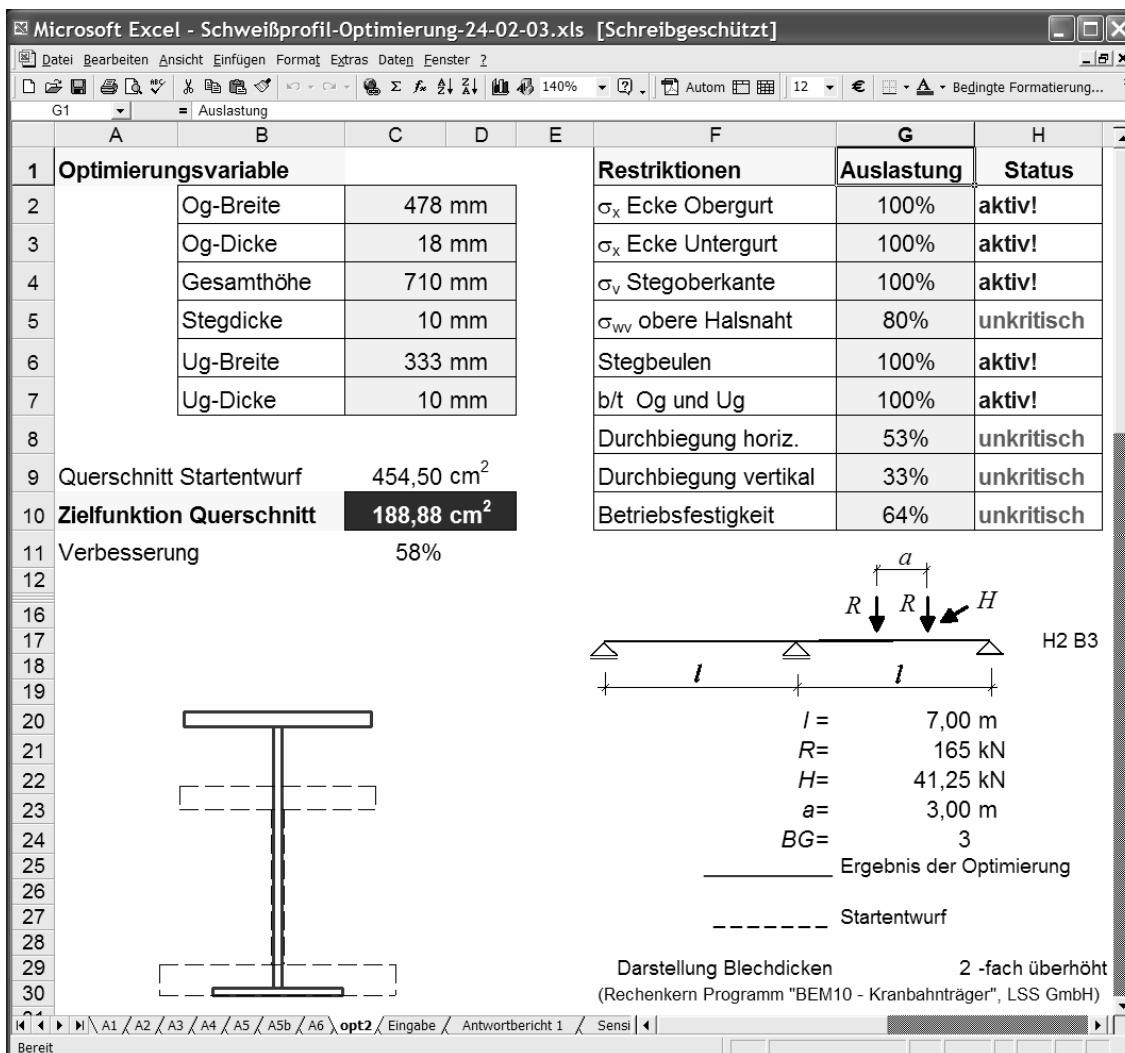


Abb. Optimierungsbeispiel Kranbahenträger: Aufgabenstellung und Ergebnis

Die nachstehende Abb. zeigt das Startfenster des „Solver“, in dem dem Programm mitgeteilt wird, welche Tabellenzellen die Optimierungsfunktionen beinhalten. Rechts in der Abb. ist das Fenster mit den sog. Tuningparametern zu erkennen. Durch geschickte Auswahl der dort angegebenen Werte nimmt man wesentlichen Einfluß auf die Konvergenz der iterativen Optimierungsrechnung.

Durch Anklicken des „Lösen“-Buttons im Solver-Fenster wird die Optimierung gestartet. Innerhalb weniger Sekunden liefert EXCEL die Lösung.

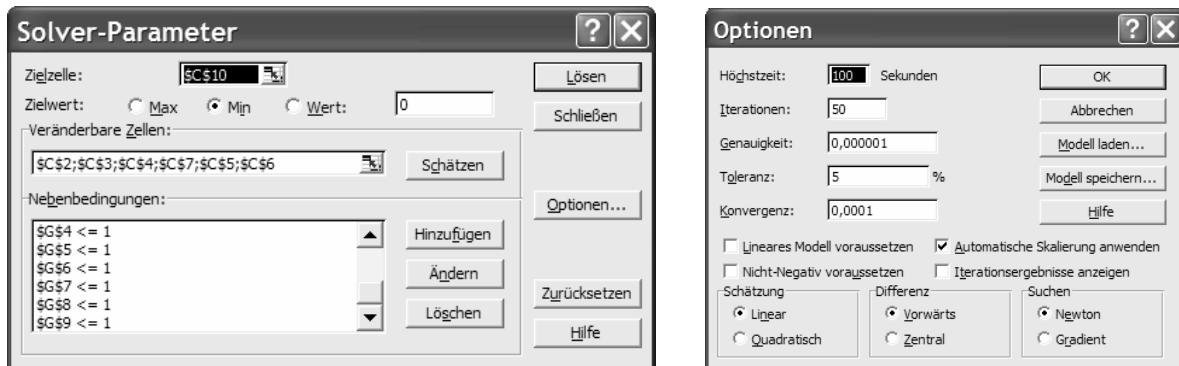


Abb. „Solver“ – Eingabefenster für Optimierungsfunktionen und Tuningparameter

Ergebnisse aus numerischen, iterativen Optimierungsrechnungen sollten stets sehr kritisch bewertet werden, bevor man sie als richtig akzeptiert. Die Vielzahl von aktiven Restriktionen kann darauf hindeuten, daß das Rechenergebnis in guter Nähe zum Optimum liegt.

Die nachstehende Abb. gibt einen typischen Optimierungsverlauf wieder. Die Kurve zeigt den im jeweiligen Iterationsschritt erreichten Zielfunktionswert (Querschnittsfläche des Trägers). Für den Startentwurf, den 3. und den letzten Iterationsschritt sind außerdem die Querschnittsformen dargestellt (Querschnitte mit durchgezogener Umrandung). Man erkennt, daß die Veränderung der Optimierungsvariablen keineswegs geradlinig erfolgt: der Ergebnisquerschnitt aus dem 3. Iterationsschritt weist eine geringere Trägerhöhe auf als der Startentwurf und als der optimale Trägerquerschnitt. Die Ursache für diesen Richtungswechsel lässt sich mit der Wandereranalogie erklären:

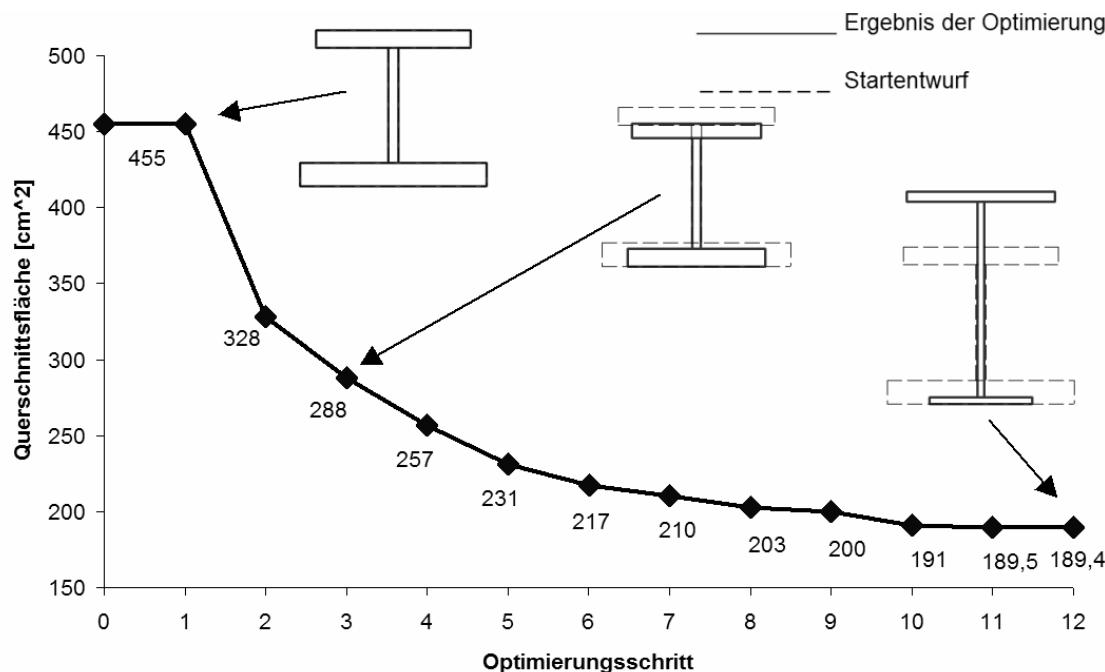


Abb. Verlauf der Optimierungsiteration mit zugehörigen Querschnitten (Blechdicken zweifach überhöht dargestellt)

Der Optimierungsalgorithmus verringert zunächst alle Querschnittsmaße. Dies ist möglich, da für den Startentwurf noch keine Restriktion aktiv ist und eine Verringerung aller Maße im Sinne der Zielfunktion (Querschnittsfläche) sinnvoll ist. Eine weitere Verkleinerung des Trägers ist nach dem 3. Iterationsschritt nicht mehr möglich, da plötzlich Restriktionen aktiv werden (Die Spannungen an den Randfasern errei-

chen ihren Grenzwert). Um in der Wandereranalogie zu bleiben: der Optimierungsalgorithmus (Wanderer) ist am Zaun angekommen und muß deshalb seine Richtung ändern. Nun wird die Trägerhöhe vergrößert und gleichzeitig werden die Gurtquerschnitte verringert, um den Gesamtquerschnitt – bei ausreichender Tragfähigkeit – zu minimieren. Dies führt dann zum dargestellten Optimum.

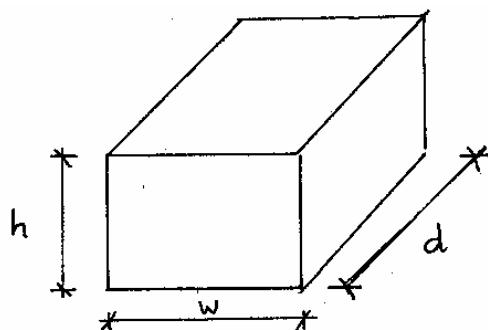
4.2 Beispiele

4.2.1 Bsp. 1: Querschnitt unter Biegung und Normalkraft

Ein Querschnitt (S 235, Rechteckquerschnitt, Breite $b=20\text{cm}$, Höhe h) ist durch Normalkraft $N = 400 \text{ kN}$ und Moment $M = 40 \text{ kNm}$ beansprucht. Die Querschnittsfläche soll minimal werden. Gesucht ist die Höhe h . Als Restriktion ist zu berücksichtigen, daß die Spannung $21,8 \text{ kN/cm}^2$ nicht überschreiten darf.

4.2.2 Bsp. 2: Pappkarton

Ein Karton soll ein Volumen von mindestens $0,4 \text{ m}^3$ haben. Die Maße (Höhe h , Breiten w und d) sollen so gewählt werden, daß die erforderliche Menge Pappe minimal wird (Kosten!). Zu beachten ist, daß Oberseite und Unterseite aus jeweils zwei Pappschichten bestehen, um die Stabilität des Kartons sicherzustellen.



Veränderbare Größen: h, d, w

Als Zielfunktion ist die Pappfläche zu verwenden.

Nebenbedingung: Das Volumen $V=h*d*w$ muß mindestens $0,4 \text{ m}^3$ sein.

4.2.3 Bsp. 3: I-Schweißprofil

Ein doppeltsymmetrisches I-Schweißprofil (Werkstoff S235) wird durch $\max M_{yd}=+100 \text{ kNm}$, $\max M_{zd}=+20 \text{ kNm}$ und $\max Q_{zd} = +300 \text{ kN}$ belastet. M_{yd} und M_{zd} wirken gleichzeitig am selben Ort. An der Stelle der maximalen Querkraft sind die Momenten 0.

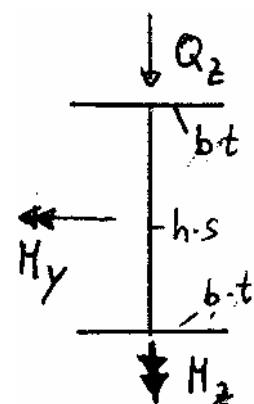
Der Träger wird beschrieben durch Flanschbreite b , Flanschdicke t , Steghöhe h , Stegdicke s . Er ist so zu dimensionieren, daß sein Querschnitt minimal wird.

Dabei ist zu beachten, daß aus Gründen der Beulsicherheit der Steg nicht dünner als $0,8\text{cm}$ werden darf, die Flanschdicke muß mindestens $0,6 \text{ cm}$ sein.

Aus Gründen des Platzbedarfs darf der Träger nicht höher als 60 cm ausgeführt werden.

Vergleichsspannungen brauchen aus Vereinfachungsgründen nicht berücksichtigt zu werden

- Erstellen Sie auf Papier das Optimierungsmodell mit allen Formeln. Schätzen Sie eine Ihnen brauchbar erscheinende Lösung ab.
- Programmieren Sie alle Formeln
- Lösen Sie das Problem mit dem Solver: Wie sieht der optimale Querschnitt aus?
- Variante: einfachsymmetrischer I-Querschnitt, siehe Bild: wieviel Querschnittsfläche lässt sich gegenüber dem doppeltsymmetrischen I-Querschnitt sparen?



Optimierungsvariablen $x_i; i=1,n$	6 zu verändernde Querschnittsmaße
Restriktionen $g_j(x); j=1,m$	Nachweise der Tragsicherheit, der Gebrauchstauglichkeit und der Ermüdungssicherheit: Auslastung maximal 100%
Zielfunktion $z(x)$	Querschnittsfläche

Abb. Optimierungsmodell einfachsymmetrischer I-Querschnitt

4.2.4 Bsp. 4: Federsystem ([15], S.72)

Example 3-1 Equilibrium position of a spring system

Consider the simple two-spring system shown in the undeformed position in Fig. 3-1a and after deformation in Fig. 3-1b. The springs are assumed to be linearly elastic and the loads P_1 and P_2 are constant. This is a geometrically nonlinear analysis problem because the resistance to the load is a function of the deformed position.

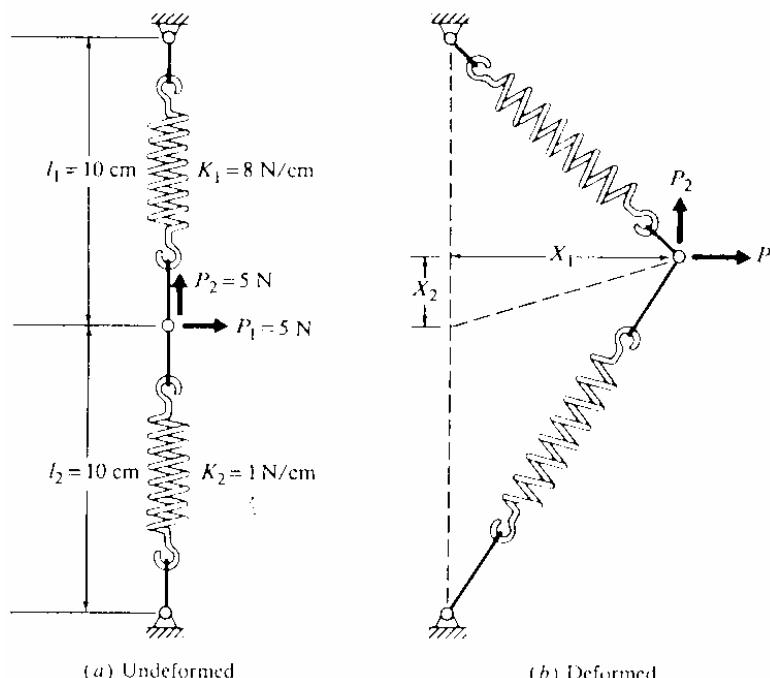
Defining the spring deformation as Δl_1 and Δl_2 for springs 1 and 2, respectively, we can write an expression for the total potential energy of the system as

$$PE = \frac{1}{2}K_1(\Delta l_1)^2 + \frac{1}{2}K_2(\Delta l_2)^2 - P_1X_1 - P_2X_2 \quad (3-2)$$

In terms of the original lengths l_1 and l_2 and the displacements X_1 and X_2 , this becomes

$$\begin{aligned} PE = & \frac{1}{2}K_1\left[\sqrt{X_1^2 + (l_1 - X_2)^2} - l_1\right]^2 \\ & + \frac{1}{2}K_2\left[\sqrt{X_2^2 + (l_2 + X_1)^2} - l_2\right]^2 - P_1X_1 - P_2X_2 \end{aligned} \quad (3-3)$$

Equation (3-3) can be solved for the equilibrium displacement as an unconstrained minimization problem where X_1 and X_2 are the independent design variables and PE is the objective function.



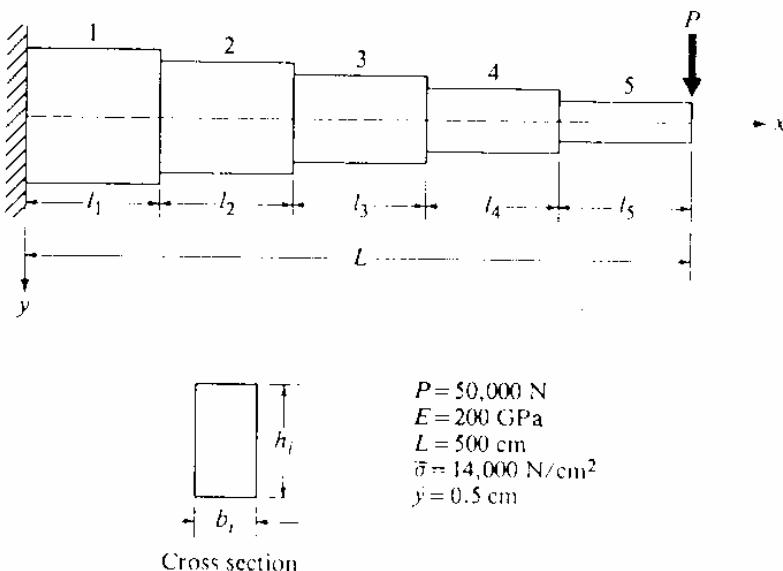
4.2.5 Bsp. 5: Stabdreischlag

siehe oben Kap. 2.2

4.2.6 Bsp. 6: Balken ([15], S.147)

Example 5-1 Design of a cantilevered beam

The cantilevered beam shown in Fig. 5-14 is to be designed for minimum material volume. The design variables are the width b and height h at each of N segments, where here $N = 5$. We wish to design the beam subject to limits on stress (calculated at the left end of each segment), deflection under the load, and the geometric requirement that the height of any segment does not exceed twenty times the width.



The deflection y_i at the right end of segment i is calculated by the following recursion formulas:

$$y_0 = y'_0 = 0 \quad (5-45a)$$

$$y'_i = \frac{Pl_i}{EI_i} \left[L + \frac{l_i}{2} - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \right] + y'_{i-1} \quad (5-45b)$$

$$y_i = \frac{Pl_i^2}{2EI_i} \left[L - \sum_{j=1}^{i-1} l_j + \frac{2l_i}{3} \right] + y'_{i-1} l_i + y_{i-1} \quad (5-45c)$$

where the deflection y is defined as positive downward, y' is the derivative of y with respect to x (the slope), and l_i is the length of segment i . Young's modulus E is the same for all segments, and the moment of inertia for segment i is

$$I_i = \frac{b_i h_i^3}{12} \quad (5-46)$$

The bending moment at the left end of segment i is calculated as

$$M_i = P \left[L + l_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \right] \quad (5-47)$$

and the corresponding maximum bending stress is

$$\sigma_i = \frac{M_i h_i}{2 I_i} \quad (5-48)$$

The design task is now defined as

$$\text{Minimize: } V = \sum_{i=1}^N b_i h_i l_i \quad (5-49)$$

Subject to:

$$\frac{\sigma_i}{\bar{\sigma}} - 1 \leq 0 \quad i = 1, N \quad (5-50)$$

$$\frac{y_N}{\bar{y}} - 1 \leq 0 \quad (5-51)$$

$$h_i - 20b_i \leq 0 \quad i = 1, N \quad (5-52)$$

$$b_i \geq 1.0 \quad i = 1, N \quad (5-53)$$

$$h_i \geq 5.0 \quad i = 1, N \quad (5-54)$$

Here $\bar{\sigma}$ is the allowable bending stress and \bar{y} is the allowable displacement. This is a design problem in $n = 2N$ variables. There are $N + 1$ nonlinear constraints defined by Eqs. (5-50) and (5-51), N linear constraints defined by Eq. (5-52), and $2N$ side constraints on the design variables defined by Eqs. (5-53) and (5-54). The side constraints are treated here as general inequality constraints. Additionally, lower bounds of 0.1 are imposed explicitly on b_i and h_i , $i = 1, N$ within the optimization program to ensure that the design remains physically meaningful.

Schrifttum

- [1] Bronstein, Semendjajew; Taschenbuch der Mathematik, 7. Auflage, 1979
- [3] Schwefel, H.-P.; Numerische Optimierung von Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie; Basel und Stuttgart 1977
- [4] Mattheck, C.; Computer Aided Optimization; Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1989
- [7] Baier, H., Seeßelberg, C. und Specht, B.; Optimierung in der Strukturmechanik; Vieweg Verlag Braunschweig, Wiesbaden 1994
- [8] Microsoft EXCEL, Version 2003, Microsoft Corporation, 2003
- [10] Seeßelberg, C.: Kranbahnen – Bemessung und konstruktive Gestaltung; Bauwerk Verlag; ISBN 3-89932-041-7; Berlin 2005; www.bauwerk-verlag.de
- [15] Vanderplaats, G.N.; Numerical optimization techniques for engineering design; New York 1984